



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

[2] a) Seja F um campo vetorial $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável, e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto com bordo $\partial\Omega$ orientável (ou seja, é possível definir a normal exterior $\hat{n}$ à $\partial\Omega$), tal que $\overline{\Omega}$ é compacto. Então

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV, \quad dV = dx \, dy \, dz$$

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é a imagem de $\phi: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω_2 é um aberto com fecho compacto em $\mathbb{R}^2$, e $\phi: \Omega_2 \rightarrow S$ é um homeomorfismo,

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times F \cdot \hat{n} \, dS$$

b) se u é duas vezes diferenciável, então $\nabla u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial diferenciável e nas hipóteses do teorema da divergência:

$$\int_{\partial R} \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = \int_R (\nabla \cdot \nabla u) \, dV, \text{ e portanto}$$

$$\nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv \Delta u.$$



c) QUEREMOS calcular a integral sobre
serão 3 pares de integrais de superfície

$$\iint d\theta d\phi \nabla u \cdot \hat{n} dS (r=r_2) + \nabla u \cdot \hat{n} dS (r=r_1)$$

$$+ \iint dr d\theta \nabla u \cdot \hat{n} dS (\phi=\phi_1) + \nabla u \cdot \hat{n} dS (\phi=\phi_2)$$

$$+ \iint dr d\phi \nabla u \cdot \hat{n} dS (\theta=\theta_2) + \nabla u \cdot \hat{n} dS (\theta=\theta_1)$$

considerando que a matriz Jacobiana de coordenadas esféricas
tem a forma $J_\psi =$

segundo $\frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ as

$$\begin{bmatrix} r \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}$$

as colunas de J_ψ , respectivamente. substituindo a para
metrização, temos

$$I = \iint d\theta d\phi \left(\nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] (r=r_2) - \nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] (r=r_1) \right) \\ + \iint dr d\theta \left(\nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] (\phi=\phi_2) - \nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] (\phi=\phi_1) \right) \\ + \iint dr d\phi \left(\nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] (\theta=\theta_2) - \nabla u \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] (\theta=\theta_1) \right)$$



defina $W = \begin{bmatrix} J_\psi^T \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

Utilizando propriedades do determinante, temos

$$\begin{aligned} I = & \iiint d\theta d\phi - \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} (r=r_2) + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} (r=r_1) \\ & + \iiint dr d\theta - \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} (\phi=\phi_2) + \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} (\phi=\phi_1) \\ & + \iiint dr d\phi - \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \end{vmatrix} (\theta=\theta_2) + \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \end{vmatrix} (\theta=\theta_1) \end{aligned}$$

d) Podemos encarar cada subtração de uma derivada, e assim teremos:

$$\begin{aligned} I = & \iiint dr d\theta d\phi \left[\frac{\partial}{\partial r} \begin{vmatrix} \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \end{vmatrix} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{vmatrix} \leftarrow \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \\ \leftarrow W \rightarrow \end{vmatrix} \right], \end{aligned}$$

pega regra de Laplace para inversão de matrizes, isto é equivalente a

$$= - \iiint dr d\theta d\phi \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \cdot \left(\text{Det}(J_\psi) J_\psi^{-1} W \right)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

e)

Pela forma que construímos J_4 , $\text{Det}(J_4)$.

$$= -r^2 \sin \theta$$

observe que $J_4^T J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \equiv D$, portanto

$$J_4^{-1} w = J_4^{-1} (J_4^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = (J_4^T J_4)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$I = \iiint dr d\theta d\phi \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$= \iiint dr d\theta d\phi \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^2 \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$= \iiint dr d\theta d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right)$$

como pelo item (2) temos que isto é igual a $\iiint \Delta u \, dr \, d\theta \, d\phi$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

e pelo teorema de mudança de variável temos

$$\iiint \Delta u dx dy dz = \iiint (\Delta u)_{r,\theta,\phi} |J_\Psi| dr d\theta d\phi$$

Igualando os integrandos, temos

$$(\Delta u)_{r,\theta,\phi} = \frac{1}{|J_\Psi|} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right]$$

Questão 3:

1- Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$, i.i.d. então, se

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ temos que } \rightarrow \text{convergência em distribuição}$$

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

2- Sem perda de generalidade, podemos nos restringir ao caso $E[X_i] = 0$, $\text{Var}(X_i) = 1$, pois sempre é possível definir $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ com essas propriedades.

$$\text{Seja } \phi(k) = E \left[e^{-2\pi i k \cdot X_i} \right], \text{ e } \Phi(k) = E \left[e^{-2\pi i k \cdot \bar{X}_n \sqrt{n}} \right]$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

note que $E[e^{-2\pi i z}]$, onde $z \sim N(0,1)$

$$= \hat{p}(z), \quad \text{se } f = e^{-\pi x^2}$$

(transformada de Fourier)

$$\hat{f} = e^{-\pi k^2}$$

$$e \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

logo $\hat{p}(z) = e^{-2\pi^2 k^2}$. Já a distribuição de $\sqrt{M} \bar{X}_M$ é dada por $\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M p\left(\frac{\sqrt{M} x}{M}\right) * \text{onde } Y = \sum_{i=1}^M X_i$, onde * denota

$$P_Y(x) = (p_x * p_x * \dots * p_x)(x)$$

onde * denota a operação de convolução. Logo calculando $E[e^{-2\pi i \sqrt{M} \bar{X}_M}] = \sqrt{M} F[P_Y(\sqrt{M} x)]$

$$= \phi^M\left(\frac{k}{\sqrt{M}}\right) = \bar{\Phi}(k).$$

ϕ tem as propriedades: $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = -4\pi^2$. logo, se $\frac{k}{\sqrt{M}} \ll 1$, podemos expandir ϕ em séries de Taylor em torno da origem, levando a

$$\phi^M\left(\frac{k}{\sqrt{M}}\right) \approx \left(1 - \frac{4\pi^2 k^2}{2M} + o\left(\frac{k^2}{M}\right)\right)^M. \text{ Portanto}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\pi^2 k^2}{n}\right)^n = e^{-2\pi^2 k^2} = \hat{p}_Z(k)!$$

portanto pontualmente vale que $\bar{\Phi}(k) \rightarrow \hat{p}_Z(k)$

Finalmente pelo teorema de continuidade de Levy, se a função característica de uma sequência de variáveis aleatórias W_n converge pontualmente para a função característica de W , então $W_n \xrightarrow{d} W$. como $\bar{\Phi}(k) \rightarrow \hat{p}_Z(k)$ pontualmente, podemos afirmar que $\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{d} Z$, $Z \sim N(0,1)$.

3. $\text{Var}(X_j) = \frac{1}{j}$ neste caso. logo, se seguirmos a mesma rota de demonstração, teremos: $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$

$$\hat{p}_{S_n} = \prod_{i=1}^n \hat{\Phi}_i\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \approx \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2\pi^2 k^2}{n j^2}\right). \text{ Basta normalizar a soma de modo que}$$

as funções características não são mais iguais

Este limite

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2\pi^2 k^2}$$

$$\frac{1}{j^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A – IM
EDITAL 54/2024

Questão 1: Existe uma transformação de similaridade S para qualquer matriz real A $n \times n$, de tal forma

que SAS⁻¹ =

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^1 & & & \\ & \lambda_1^1 & & \\ & & \lambda_1^1 & \\ & & & \lambda_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2^1 & & & \\ & \lambda_2^1 & & \\ & & \lambda_2^1 & \\ & & & \lambda_2^1 \end{bmatrix} \lambda_3 \lambda_4$$

, isto é,
a matriz é
Bloco-Diagonal,
autovalores que
correspondem a
raízes simples

do polinômio característico geram blocos 1×1 na diagonal, se um autovalor λ_k possui multiplicidade algébrica e geométrica iguais $= l$, então temos um bloco diagonal $\begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}_{l \times l}$. No entanto,



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Caso haja um autovalor λ_n cuja multiplicidade algébrica $\neq$ geométrica, ocorre a formação de blocos de Jordan, com a supra-diagonal preenchida por 1.

2 - o polinômio pode ser fatorado como

$$p(t) = t(t^2 + a)^2, \text{ logo podemos considerar}$$

2 casos: $a \neq 0, a = 0$
se $a = 0$: , $p(t) = t^5$, e a única forma possível é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

se $a \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ & -ai & 1 & & \\ & & ai & 0 & \\ & & & -ai & 1 \\ & & & & ai \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ & -ai & 1 & & \\ & & ai & 1 & \\ & & & -ai & 1 \\ & & & & ai \end{bmatrix}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

3 - O não possui 1 como autovalor, e em particular, a existência da forma canônica de Jordan garante que se duas matrizes possuem os mesmos autovalores, e se os conjuntos

$$N_d(\lambda) = \text{Ker}((P - \lambda I)^d) = \dim(\lambda - E)^n$$

$$M_d(\lambda) = \text{Ker}(Q - \lambda I)^d, \text{ onde } d \text{ é a multiplicidade do autovalor } \lambda$$

possuem a mesma dimensão para cada autovalor λ , então P e Q são similares, pois possuem a mesma forma canônica de Jordan. No mesmo caso

$$N_M = \text{Ker}((B - I)^M)$$

$$M_M = \text{Ker}((B^{-1} - I)^M)$$

, já que temos somente um autovalor ($\lambda=1$).

no entanto, se denotarmos $P_B(t) = \text{Det}(tI - B)$
 $= P_{B^{-1}}(t) = \text{Det}(tI - B^{-1})$
 $= (t-1)^n,$

veremos que $N_M = \text{Ker}(P_B(B))$ por definição,
 $M_M = \text{Ker}(P_{B^{-1}}(B^{-1}))$ $P_B(B) = 0$ (matriz nula)

FAVOR NÃO ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!

logo $\dim(N_M) = \dim(M_M) = n$, logo são similares